

Guía de Inferencia: Estimación Puntual y Métodos

Referencias: Wasserman (2003/2021), Lock et al. (2020), Bianco & Martínez

Universidad Torcuato Di Tella

Marco y Objetivo Central de la Inferencia:

El objetivo es utilizar los datos observados de una muestra aleatoria (m.a.) $X_1, \dots, X_n \sim F$ i.i.d. para inferir o estimar alguna característica o parámetro poblacional desconocido $\theta(F)$, cuantificando rigurosamente el nivel de incertidumbre inherente.

1. INGREDIENTES FUNDAMENTALES DE LA INFERENCIA

Población y Muestra Aleatoria

Muestra Aleatoria (m.a.): Conjunto de variables $X_1, \dots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) generadas por una distribución F subyacente.

Parámetro y Estimador

Parámetro (θ): Valor fijo teórico de la población.
Estimador ($\hat{\theta}_n$): Función de la muestra $g(X_1, \dots, X_n)$ que es una variable aleatoria con su propia distribución muestral.

2. CRITERIOS DE BONDAD: SESGO E INESGADÉZ

Para evaluar la precisión y calidad de un estimador puntual $\hat{\theta}_n$ frente al parámetro verdadero θ , se formulan las propiedades de sesgo:

Sesgo (Bias): $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ **Insesgado:** $E(\hat{\theta}) = \theta \Leftrightarrow B(\hat{\theta}) = 0$

Insesgadez Asintótica: Un estimador $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado si su esperanza converge al valor verdadero al aumentar indefinidamente el tamaño muestral: $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$.

3. ERROR ESTÁNDAR (SE): TEÓRICO Y ESTIMADO

El **Error Estándar** cuantifica la variabilidad o dispersión muestral de un estimador $\hat{\theta}_n$. Mide cuánto varía el estimador entre distintas muestras aleatorias del mismo tamaño:

Error Estándar Teórico: $SE(\hat{\theta}_n) = \sqrt{V(\hat{\theta}_n)}$ **Error Estándar Estimado:** $\hat{SE}(\hat{\theta}_n) = \sqrt{\hat{V}(\hat{\theta}_n)}$

Media Muestral $\bar{X}_n$

- $V(\bar{X}_n) = \sigma^2/n \Rightarrow SE(\bar{X}_n) = \sigma / \sqrt{n}$
- Con σ desconocido: $\hat{SE}(\bar{X}_n) = S / \sqrt{n}$
(Donde S es el desvío estándar muestral).

Proporción Muestral $\hat{p}_n$ (Bernoulli)

- $V(\hat{p}_n) = p(1-p)/n \Rightarrow SE(\hat{p}_n) = \sqrt{[p(1-p)]/n}$
- Con p desconocido: $\hat{SE}(\hat{p}_n) = \sqrt{[\hat{p}(1-\hat{p})]/n}$
(Clave en Test A/B y proporciones muestrales).

EJERCICIOS REPRESENTATIVOS DE LA PRÁCTICA (SESGO Y SE)

1. DIRECTO · PRÁCTICA 3, E.J. 7(C) / CP 2

Dada $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$ y $\hat{\theta}_n = 2\bar{X}_n$. $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ (insesgado). Su error estándar es $SE(\hat{\theta}_n) = \sqrt{4 V(\bar{X}_n)} = 2 \sigma / \sqrt{n} = \theta / \sqrt{3n}$.

2. INTERMEDIO · ESTIMADOR DE VARIANZA Y SE

Para varianza σ^2 : $S_n^2 = 1/(n-1) \sum (X_i - \bar{X})^2$ cumple $E(S_n^2) = \sigma^2$ (insesgado). Con σ desconocido para estimar la media, sustituimos el parámetro poblacional por S obteniendo $\hat{SE}(\bar{X}) = S/\sqrt{n}$.

4. ERROR CUADRÁTICO MEDIO (ECM) Y CONSISTENCIA

El Error Cuadrático Medio cuantifica la pérdida cuadrática global combinando variabilidad (a través del SE al cuadrado) y sesgo:

$$\text{Descomposición del ECM: } ECM(\theta) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = [B(\theta)]^2 + V(\theta) = [B(\theta)]^2 + [SE(\theta)]^2$$

Criterio Fundamental de Consistencia

Se dice que $\hat{\theta}_n$ es consistente para θ si converge en probabilidad: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0$.

Condición Suficiente (Teorema): Si $\lim_{n \rightarrow \infty} ECM(\hat{\theta}_n) = 0 \Leftrightarrow (\lim B(\hat{\theta}_n) = 0 \text{ y } \lim SE(\hat{\theta}_n) = 0)$, entonces $\hat{\theta}_n$ es consistente.

5. MÉTODOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ESTIMADORES

Método	Procedimiento Operativo	Propiedades Típicas
Momentos (MM)	Iguala momentos teóricos poblacionales $\alpha_k = E[X^k]$ con muestrales $m_k = (1/n) \sum X_i^k$ y despeja los parámetros.	Cálculo simple. Consistente por Ley Débil de los Grandes Números (LDGN).
Máxima Verosimilitud (EMV)	Maximiza la verosimilitud $L(\theta; \mathbf{x}) = \prod f(x_i; \theta)$ o log-verosimilitud $\ell(\theta) = \sum \ln f(x_i; \theta)$: $\partial \ell / \partial \theta = 0$.	Asintóticamente normal, insesgado y de mínima varianza (mínimo SE asintótico).

CASO PRÁCTICO: ESTIMADORES EN BERNOULLI $\sim$ BE(P)

Sea $X_1, \dots, X_n \sim Be(p)$. Se analiza el estimador alternativo regularizado $\hat{p}_n = (\sum X_i + 1) / (n + 2)$:

- Esperanza:** $E(\hat{p}_n) = [n p + 1] / [n + 2]$. Sesgo: $B(\hat{p}_n) = (1 - 2p)/(n + 2) \neq 0$ (Sesgado).
- Insensgadez asintótica:** $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{p}_n) = p$.
- Error Estándar:** $SE(\hat{p}_n) = \sqrt{[n p (1 - p)] / (n + 2)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- Consistencia:** Como $B(\hat{p}_n) \rightarrow 0$ y $SE(\hat{p}_n) \rightarrow 0$, $ECM \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{p}_n$ es consistente para p .

6. INTERVALOS DE CONFIANZA (IC) Y EL ROL DEL ERROR ESTÁNDAR

Un IC cuantifica formalmente la incertidumbre. Su estructura canónica universal articula el estimador puntual con su error estándar estimado:

Estructura General: $IC_{1-\alpha}(\theta) = [\hat{\theta}_n \pm \text{Valor Crítico} \times \hat{SE}(\hat{\theta}_n)]$ | **Margen de Error (ME):** $ME = \text{Valor Crítico} \times \hat{SE}(\hat{\theta}_n)$

Propiedades de una Cantidad Pivote $Q(X_1, \dots, X_n, \theta)$:

1. Es función de la muestra aleatoria y del parámetro θ de interés (estandarizado por su SE o $\hat{SE}$).
2. Su distribución de probabilidad es **totalmente conocida** (e.g., $N(0,1)$, t_{n-1}) y no depende de parámetros desconocidos.

7. TABLA MAESTRA DE PIVOTES, SE E INTERVALOS DE CONFIANZA

Parámetro / Contexto	SE / $\hat{SE}$ Empleado	Distribución Pivotal	Fórmula del IC (1 - α)
μ (Normal, σ_0 conocido)	$SE(\bar{X}) = \sigma_0 / \sqrt{n}$	Exacta $N(0, 1)$	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\bar{X})$
μ (Normal, σ desconocido)	$\hat{SE}(\bar{X}) = S / \sqrt{n}$	Exacta t_{n-1}	$\bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \cdot \hat{SE}(\bar{X})$
μ (F cualquiera, n grande)	$\hat{SE}(\bar{X}) = S / \sqrt{n}$	Asintótica $N(0, 1)$	$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \hat{SE}(\bar{X})$
p (Proporción Bernoulli)	$\hat{SE}(\hat{p}) = \sqrt{[\hat{p}(1-\hat{p})/n]}$	Asintótica $N(0, 1)$	$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \hat{SE}(\hat{p})$
$\delta = \mu_1 - \mu_2$ (Dos Muestras)	$\hat{SE}(\Delta\bar{X}) = \sqrt{[S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2]}$	Asintótica $N(0, 1)$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{\alpha/2} \cdot \hat{SE}(\Delta\bar{X})$

EJERCICIOS REPRESENTATIVOS DE LA PRÁCTICA (IC Y SE)

DIRECTO · PRÁCTICA 4, EJ. 5(B)

Muestra normal con varianza desconocida: con $\hat{SE}(\bar{X}) = S/\sqrt{n}$, se define el pivote $T = (\bar{X} - \mu)/\hat{SE}(\bar{X}) \sim t_{n-1}$ y se calcula el IC exacto al 95%.

INTERMEDIO · PRÁCTICA 4, EJ. 8(D Y E)

IC asintótico para proporción con $n=70$, $\hat{p}=0.54$: $\hat{SE}(\hat{p}) = \sqrt{[0.54(0.46)/70]} \approx 0.0596$. En (e) se despeja el tamaño muestral tal que $ME = z_{\alpha/2} \hat{SE}(\hat{p}) \leq 0.03$.

INCISO COMPLEJO · PRÁCTICA 4, EJ. 13 (CP 13)

IC asintótico 95% para $\delta = \mu_1 - \mu_2$ (tDCS vs Sham). Se calcula $\hat{SE} = \sqrt{[S_1^2/45 + S_2^2/50]}$. El IC resultante $[1.386 ; 5.214]$ no contiene el cero, evidenciando una mejora significativa.